Lietiskā topoloģija un attēlu analīze

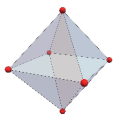
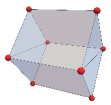
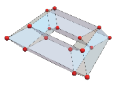
Jānis Lazovskis (*Latvijas Universitāte*, Klīniskās un profilaktiskās medicīnas institūts)

Atslēgvārdi: topoloģija, algebriskā topoloģija, topoloģiskā datu analīze, attēlu analīze

Kopsavilkums. Topoloģija ir abstrakta un teorētiski bagāta matemātikas joma, tomēr tās pielietojumi cilvēku ikdienas dzīvē parādās arvien biežāk. Topoloģijas spēja papildināt jebkuru datu apstrādes procesu ar jaunu informāciju padara to vērtīgu skaitliski intensīvos darbos no DNS sekvencēšanas līdz fizisku modeļu prototipēšanai. Šī raksta fokuss ir topoloģiskas metodes attēlu analīzē. Izveidojot dažādas un savstarpēji saistītas topoloģiskas telpas no digitāliem attēliem, ir iespējams atklāt jaunu informāciju par attēliem, kas nav redzama ar klasiskiem attēlu analīzes rīkiem. Šis raksts apraksta attēlu analīzes topoloģiskās metodes, izmantojot kubu kompleksus un persistento homoloģiju, lai pārtulkotu vizuālu informāciju matemātiskā informācijā, un to izmantotu medicīnisku attēlu analīzē.

1. Ievads

Topoloģija (angliski: *topology*) ir virsmu un telpu matemātika. Tas ir, tā vietā lai saskaitītu skaitļus vai salīdzinātu funkcijas, tiek saskaitītas ģeometriskas formas un tiek salīdzināti funkciju attēli.

telpa X			
virsotnes V	6	8	12
škautnes E	12	14	32
skaldnes F	8	8	16
$\chi(X)$	2	2	0

2. Tab. Lodes virsmas (pirmā un otrā sleja) un tora virsmas (trešā sleja) konstrukcija (pirmā rindā) ar trijstūriem un taisnstūriem. Saskaitot virsotnes un skaldnes un atņemot šķautnes, tiek aprēķināts Eilera skaitlis (pēdējā rindā).

Piemēram, ja pietuvinām lodes vai tora virsmu, izmantojot trijstūrus vai taisnstūrus (skat. 2. tabulu), šo telpu *Eilera raksturīgais skaitlis* (angliski: *Euler characteristic*) jeb vienkārši *Eilera skaitlis*, aprēķināts kā

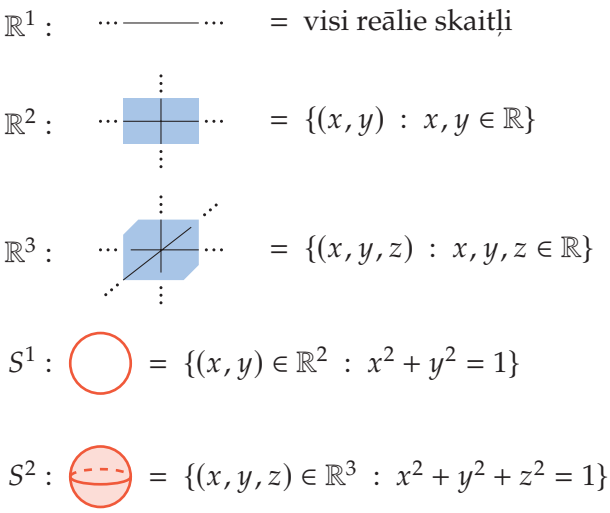
$$\chi(X) = V - E + F,$$

būs nemainīgs, neatkarīgi no trijstūru vai taisnstūra daudzuma, ko lietojam. Eilera skaitlis $\chi(X)$ ir vienāds ar $2-2g$, kur g apzīmē telpas *ģinti* (angliski: *genus*). Telpām divās dimensijās[5], telpas ģints norāda cik daudz "caurumu" ir dotai telpai.

[5]un bez "malām", bet šo terminu šeit nedefinēsim.

2. Telpas un funkciju attēli

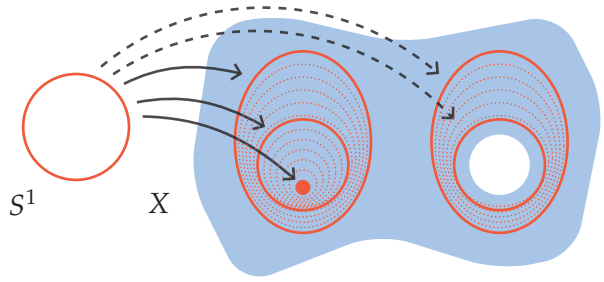
Topoloģiska telpa (angliski: *topological space*) jeb vienkārši *telpa* ir kopa ar papildus aprakstu par to, ko nozīmē būt "tuvu" katram loceklim jeb būt katra locekļa "apkaimē" (angliski: *neighborhood*). Pazīstamākās telpas ir taisne, plakne, un trīs dimensiju telpa, kuras attiecīgi apzīmē $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, kā trīs *Eiklīda telpas* (angliski: *Euclidean space*) piemērus (skat. 23. Attēlu).



23. Att. Trīs Eiklīda telpas vienā, divās un trīs dimensijās un divas n-sfēras, vienā un divās dimensijās. Daudzpunkte norāda, ka telpa turpinās bezgalīgi daudzpunktes virzienā.

Lodes un tora virsmas ir vienkāršas, jo tās var precīzi definēt ar vienu formulu. Ne visām telpām ir tik skaidra struktūra, tāpēc izmantojam vienkāršāku telpu attēlus nezināmās telpās. Tas ir, telpas X topoloģiju aprakstām analizējot dažādu funkciju $S^1 \to X$ attēlus. Di-

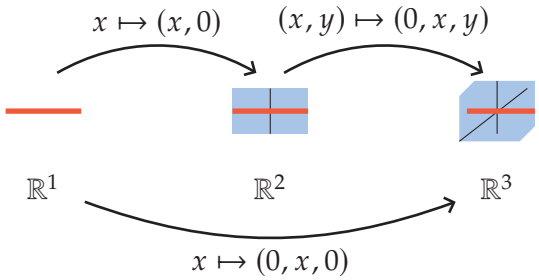
vi šādu funkciju $f, g\colon S^1 \to X$ attēli "skaita vienu un to pašu telpas X caurumu," ja ir iespējams nepārtrauktā veidā "pārvietot" funkcijas f attēlu uz funkcijas g attēlu.



24. Att. Dažādas funkcijas $S^1 \to X$ (bultas) un to attēli telpā X. Funkcijas ar nepārtraukto līniju ir savstarpēji līdzīgas, jo katru iespējams pārveidot citas attēlā, attēlu izstiepjot un savelkot. Abas funkcijas ar pārtraukto līniju arī ir savstarpēji līdzīgas, bet tās nav līdzīgas ar nepārtraukto līniju funkcijām.

Ja attēlu iespējams pavisam savilkt, tā funkcija skaita "triviālo" caurumu (citiem vārdiem sakot, šī funkcija nav novērojusi telpā X nevienu caurumu). Piemēram, 24. Attēlā funkcijas ar nepārtrauktām līnijām "neredz" telpas X caurumu labā pusē, bet funkcijas ar pārtrauktām līnijām to redz.

Ja telpa Y ir daļa no telpas X (šo attiecību apzīmējot ar $Y \subseteq X$), uzreiz ir funkcija $Y \to X$, kas katru telpas Y locekli sūta pašu uz sevi. Šo īpašo funkciju sauc par *iekļāvumu* (angliski: *inclusion*) un apzīmē ar ι un ar bultu $Y \hookrightarrow X$, definējot $\iota(y) = y$ visiem $y \in Y$.



25. Att. Iekļāvuma $\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ kompozīcija ar funkciju $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definē funkciju $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$.

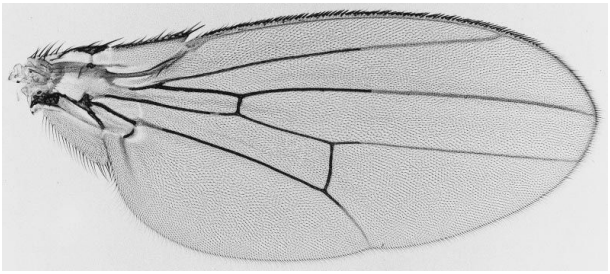
Ja ir divas funkcijas $Z \to Y$ un $Y \to X$ šo funkciju *kompozīcija* (angliski: *composition*) definē funkciju $Z \to Y$ (skat. 25. attēlu). Kompozīcijas, it īpaši ar iekļāvumiem no vienkāršām telpām, kuru īpašības mēs labi saprotam, ir viens no pamata rīkiem lietišķā un teorētiskā topoloģijā. Tā vietā, lai raksturotu telpu X, mēs raksturojam funkciju $f\colon X \to Y$ un funkcijas attēlu $f(X) \subseteq Y$ kā telpas Y apakškopu.

3. No attēla līdz filtrācijai

Lietišķā topoloģija un topoloģiskā datu analīze ir balstīta tieši šādās telpu attiecībās

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \cdots,$$

kuras sauc par *filtrācijām* (angliski: *filtration*). No pasaules mums apkārt parasti nenāk abstrakti raksturotas topoloģiskas telpas, tāpēc tās ir jāizveido no informācijas, kas ir pieejama. Teiksim, ka tiek ievadīts attēls A, vienkāršības pēc pieņemot ka attēls ir *pelēktoņu* (angliski: *grayscale*), tas ir, katrs pikselis ir krāsas tonī starp melnu un baltu.

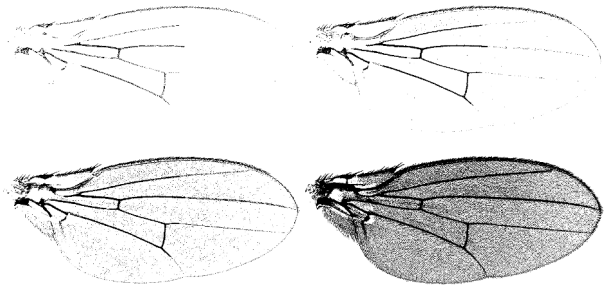


26. Att. Mušas spārns, pelēktoņu uzņēmums (no [1]).

Precīzāk, attēlā A katram pikselim p ir krāsa starp baltu un melnu, ko var uztvert kā reālu skaitli starp 0 (melns) un 1 (balts). Melnbalts attēls A' tiek definēts izvēloties jebkuru skaitli $t \in (0, 1)$ starp 0 un 1, kas nosaka, vai pelēko pikseli p pārveidot baltā vai melnā pikselī. Tas ir, skaitlis t definē funkciju

$$f_t(p) = \begin{cases} 0 & \text{ja } p \leqslant t, \\ 1 & \text{ja } p > t, \end{cases}$$

kur $p \in [0, 1]$ ir pelēktoņa attēla pikseļa krāsas vērtība, un $A' = f_t(A)$.



27. Att. Attēla A no 26. Attēla melnbaltie attēli $f_t(A)$ izmantojot četras dažādus $t \in (0,1)$.

Izvēloties vairākus (parasti vienādos attālumos) skaitļus $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$, iegūsim attēlus $A_i = f_{t_i}(A)$. Tagad mums ir attēlu virkne $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kur katrs A_i ir melnbalts un tādā pašā izmērā kā A, ar papildus nosacījumu, ja pikselis p attēlā A_i ir melns, tad visos attēlos $A_{j>i}$ tas arī būs melns.

Mušas spārna piemērs no 26. un 27. attēliem ir plašāk izpētīts ģeometriskā un topoloģiskā kontekstā, rakstā [6] veidojot saistību starp izceltām iekšējām robežām (tumšām līknēm) un reģionus, ko tie definē, kā arī to bioloģisko nozīmi.

4. No attēla līdz kubu kompleksam

Lai veiktu matemātiskus aprēķinus ar šādām melnbaltu attēlu filtrācijām, katru attēlu uztversim kā abstraktu topoloģisku objektu. Mūsu vajadzībām katrs melnbalts attēls definē *kubu kompleksu*[6] (angliski: *cubical complex*) [2]. Kubu kompleksi sastāv no kubiem dažādās dimensijās, tostarp

$C^0 =$ , $C^1 =$ , $C^2 =$ .

Šie objekti ir uzzīmēti kā abstraktas telpas, un, lai varētu veikt konkrētus aprēķinus ar tiem, nozīmēsim skaidrākas telpas šiem kubiem. Tas ir, lai

$$C^0 = \{0\}, \quad C^1 = [0,1], \quad C^2 = [0,1] \times [0,1],$$

kur $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ir intervāls reālos skaitļos, un $[0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ ir divu intervālu reizinājums reālā plaknē. Šādā veidā mēs arī uzreiz redzam, ka kubu n dimensijās jeb n-kubu varam definēt kā $C^n = [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ kā n-dimensiju Eiklīda telpas apakškopu.



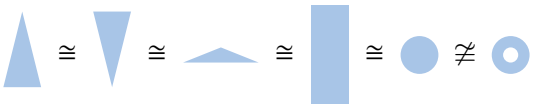
28. Att. Kā melnbalts attēls pārtop par kubu kompleksu. Melnbalti 16 pikseļi (pa kreisi); melnie pikseļi apzīmēti ar 0-kubiem (pa vidu); blakus esoši melni pikseļi apzīmēti ar 1-kubu un četri melni pikseļi kopā apzīmēti ar 2-kubu (pa labi).

Precīzi definējot, kubu komplekss C ir kopa kurā ietilpst tukšā kopa un dažādu dimensiju kubi, tā, lai jebkuru divu C piederošu kubu $\sigma, \tau \in C$ šķēlums (angliski: *intersection*) arī pieder šai kopai. Tas ir, nosakām, ka $\sigma \cap \tau \in C$, ja $\sigma \in C$ un $\tau \in C$.

Ar šādu definīciju, izmantojot melnbaltus pikseļus un to blakus esošos kaimiņus (skat. 28. attēlu), varam katru melnbaltu attēlu A_i uztvert kā kubu kompleksu C_i. Ta rezultātā, attēlu filtrācija $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kļūst par kubu kompleksu filtrāciju $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots \subseteq C_n$, kur jebkurus divus kubu kompleksus $C_i, C_{j>i}$ savieno iekļāvums $C_i \hookrightarrow C_j$.

5. Persistentā homoloģija

Līdz šim telpas topoloģija ir tikusi pasniegta ar dimensijām, ar caurumu skaitu, ar ģinti un ar funkciju attēliem. Šie visi ir bijuši daļēji apraksti par telpas X *homoloģiju* (angliski: *homology*) jeb īpašību kopumu, kas paliek nemainīgs, ja telpa tiek konkrētos veidos mainīta (kustināta, rotēta, izstiepta, saplacināta...). Funkcija $f : X \to Y$ ir *homoloģiska ekvivalence* (angliski: *homology equivalence*), ja telpas Y homoloģiju pilnībā raksturo telpas X homoloģija un funkcijas f definīcija[7]. Ja eksistē homoloģiska ekvivalence starp X un Y, šo attiecību apzīmē ar $X \cong Y$.



29. Att. Piecas telpas, starp kurām pastāv homoloģiska ekvivalence, un viena telpa, starp kuru nav homoloģiskas ekvivalences ar pārējām telpām.

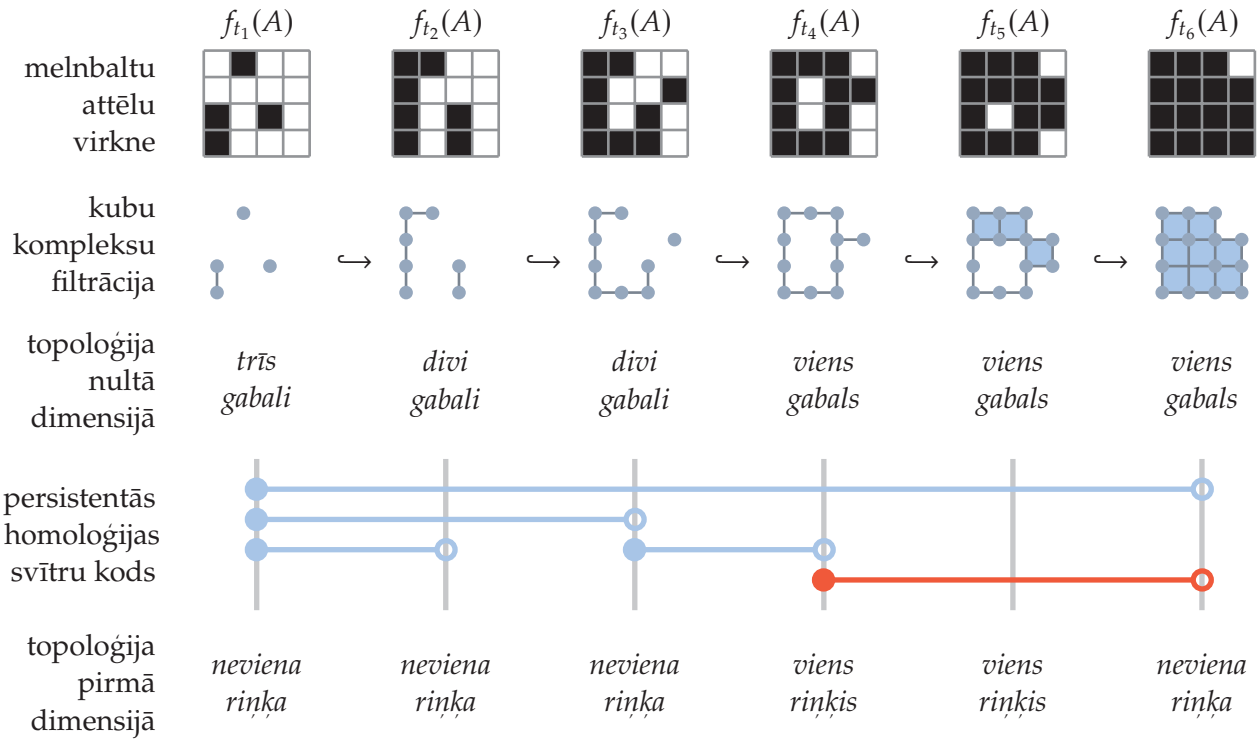
[6] Lai arī vārds "kubs" parasti apraksta telpu trīs dimensijās, šo jēdzienu vispārināsim un lietosim terminu "3-kubs" un simbolu C^3, kad tiks runāts par kubu trīs dimensijās.

[7] un ja arī pretēji, telpas X homoloģiju raksturo telpas Y homoloģija un funkcijas f inversā funkcija.

Telpas X īpašības, pēc kurām var aprēķināt tās homoloģiju (piemēram, caurumu skaits, gabalu skaits, utt.) sauc par tās *homoloģiskām īpašībām* (angliski: *homological feature*).

Persistentā homoloģija [5] (angliski: *persistent homology*) attiecas nevis uz telpu, bet uz telpu virkni, precīzāk, telpu filtrāciju. Katrai telpai filtrācijā var aprēķināt tās homoloģiskās īpašības un tad izmantot attiecību starp telpām, lai secinātu, tieši kad katra īpašība parādās un kad tā pazūd. Precīzāk sakot, nevis kad tā pazūd, bet kad tās vairs nav. Tas ir, nav precīzas vērtības, kad īpašība pēdējo reizi eksistē, bet ir precīza vērtība, kad īpašība pirmo reizi neeksistē - tāpēc īpašības "dzīvi" apzīmē ar intervālu $[a, b)$, kas ir slēgts kreisā pusē un vaļējs labā pusē. Izvērsts piemērs ir pasniegts 30. attēlā.

Ar persistento homoloģiju analizējot pelēktoņu attēlu tiek aprēķinātas intervālu kopas[8], kuras sauc par *svītru kodu* (angliski: *barcode*). Šāds raksturojošs vārds nāk no intervāla $[a, b)$ prezentācijas kā nogrieznim no punkta a līdz punktam b un vairāku šādu nogriežņu zīmēšanas blakām. Filtrācijai $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$ intervāls $[a, b)$ tās n-tās dimensijas svītru kodā norāda, ka starp skaitļiem a un b eksistē homoloģiska īpašība dimensijā n. Tas ir, eksistē fukcija $S^n \to C_k$, visiem $a \leqslant k < b$, kuras attēls telpā C_k nav savelkams.



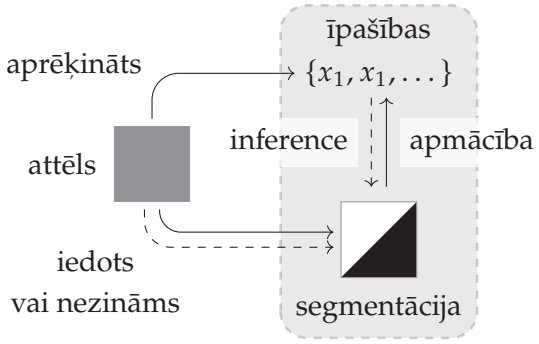
30. Att. Persistentās homoloģijas aprēķins dimensijās 0 un 1, sākot ar pelēktoņu attēlu A un skaitļiem $t_1 < \cdots < t_6$, kas definē melnbaltus attēlus un kubu kompleksus (augšējās rindas). Katrā kubu kompleksā skaitot nesavienotos gabalus, aprēķinām nultās dimensijas topoloģiju, un, skaitot visus nesavelkamos, "atšķirīgos" riņķa līnijas attēlus, $S^1 \to C_i$ aprēķinām pirmās dimensijas topoloģiju (apakšējās rindas).

6. Mašīnmācīšanās un segmentācija

Mašīnmācīšanās (angliski: *machine learning*) ir strauji augoša matemātikas un datorikas pētniecības joma, kas automatizē ievadītu datu īpašību novērošanu, salīdzināšanu un sakārtošanu. Izvadītie dati no persistentās homoloģijas papildina aprēķinātās attēla īpašības, lai uzlabotu iegūto informāciju no attēla. Mašīnmācīšanās metodi attēlu analīzē, kuras mērķis ir identificēt kādu attēla daļu kā svarīgu, sauc par *segmentāciju* (angliski: *segmentation*), un tās pamata darbība ir ievadītā attēlā

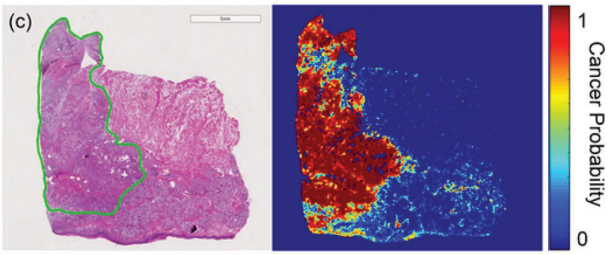
[8] Ne gluži kopas, jo šo kopu locekļi var atkārtoties. Angliski šādu objektu sauc par "*multiset*".

katram pikselim dot vērtību 0 (nesvarīgs) vai 1 (svarīgs).



31. Att. Vienkāršots mašīnmācīšanās modelis, ar iedotiem segmentētiem attēliem (angliski: *train set*) un attēliem ar nezināmu segmentāciju (angliski: *test set*). Tā saucamā "mācīšanās" notiek izceltajā labajā pusē, izmantojot automātiski aprēķinātas attēla īpašības.

Daļu no attēliem segmentē jomas speciālisti ar roku, un ar šo informāciju mašīnmācīšanās modelis vispārina rezultātus par nezināmiem attēliem. Šo procesu sauc par *inferenci* (angliski: *inference*). Medicīnisku attēlu izmantošanu ārsta secinājumu veikšanā sauc par *attēlu diagnostisku* (angliski: *diagnostic imaging*). Segmentācija var uzlabot attēlu diagnostiku, veicot pirmreizēju pārbaudi un norādot uz svarīgām attēlu daļām. Aktīva pētniecība šajā jomā notiek AIDA projektā [4], kurā iesaistās Latvijas Universitāte un Elektronikas un Datorikas Institūts.



32. Att. Cilvēka audu attēls (no [3]) ar speciālista apzīmētu vēža vai priekšvēža daļu (zaļa krāsa, kreisā puse) un mašīnmācīšanās modeļa identificētā svarīgo daļu (sarkanā krāsa, labā puse).

Lietišķā topoloģija papildina ne tikai attēla aprēķinātās īpašības, tā arī var uzlabot metodes, kā apvienot tālu esošus datus. Šī pieeja ir būtiska, kad ievadītie attēli ir ļoti lieli un to segmentācija tiek veikta pa daļai. Segmentācija daļās mazina datora slodzi, bet arī samazina informācijas apjomu, kas ir pieejams katrai daļai. Topoloģijas īpašais devums ir spēt aprēķināt vispārējas jeb globālas īpašības, izmantojot tikai lokālus datus.

* * *

Autoru finansiāli atbalsta Latvijas Zinātnes Padome (LZP) un 1.1.1.9. pasākuma "Pēcdoktorantūras pētījumi" pētniecības pieteikums Nr.1.1.1.9 / LZP / 1 / 24 / 125 "Efektīvi topoloģiski invarianti reprezentāciju atklāšanai attēlu diagnostikā".

Atsauces

[1] J. McCabe, V. French, un L. Partridge, "Joint regulation of cell size and cell number in the wing blade of Drosophila melanogaster," *Genetical Research*, sēj. 69, nr. 1, 61.–68. lpp., 1997. doi: https://doi.org/10.1017/s0016672397002620

[2] T. Kaczynski, K. Mischaikow, un M. Mrozek, *Computational Homology*, sēj. 157. New York: Springer-Verlag, 2004. doi: https://doi.org/10.1007/b97315

[3] M. Halicek, M. Shahedi, u. c., "Head and Neck Cancer Detection in Digitized Whole-Slide Histology Using Convolutional Neural Networks," *Scientific Reports*, sēj. 9, nr. 1, raksta nr. 14043, 2019. Pieejams: `https://doi.org/10.1038/s41598-019-50313-x`

[4] K. Higgins, O. P. Nyssen, J. Southern, u. c., "The Helicobacter pylori AI-clinician harnesses artificial intelligence to personalise H. pylori treatment recommendations," *Nature Communications*, sēj. 16, nr. 1, raksta nr. 6472, 2025. Pieejams: `https://doi.org/10.1038/s41467-025-61329-5`

[5] A. Zomorodian un G. Carlsson, "Computing Persistent Homology," *Discrete Computational Geometry*, sēj. 33, nr. 2, 249.–274. lpp., 2005. Pieejams: `https://doi.org/10.1007/s00454-004-1146-y`

[6] E. Miller, "Fruit Flies and Moduli: Interactions between Biology and Mathematics," *Notices of the American Mathematical Society*, sēj. 62, nr. 10, 2015.