

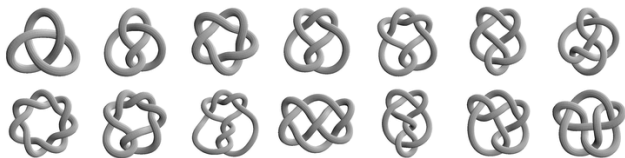
Apļi un mezgli: Matemātika un topoloģija

Izcilības skola

2021. gada 10. aprīlis

Jānis Lazovskis

LU Matemātikas nodaļa + Rīgas Biznesa Skola



Slaidi pieejami: jlazovskis.com/talks

Šī nodarbība būs daļēji lekcija, daļēji uzdevumu risināšana. Droši risiniet uzdevumus lekcijas gaitā.

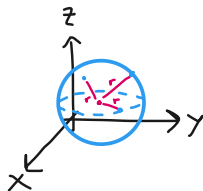
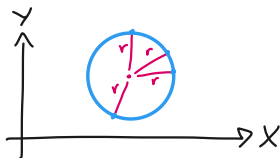
1. **Definīcijas:** sfēras, mezgli, saites, krustojumi
2. **Funkcijas:** gājieni, invarianti, polinomi
3. **Pīnes:** pavedieni, veidules, slēgtība

1. Definīcijas: sfēra

Riņķa līnija ir punktu kopa uz plaknes (2 dimensijas, jeb virzieni), kurā visiem punktiem ir viens attālums no kāda fiksēta punkta. To apzīmē ar S^1 .

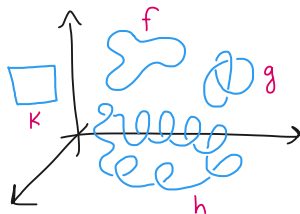
Riņķa līnijas analogs 1 dimensijā ir **divi punkti**, ko apzīmē ar S^0 , un 3 dimensijās ir **sfēra**, ko apzīmē ar S^2 .

Telpā ar $n + 1$ dimensiju analogs ir **n -sfēra**, ko apzīmē ar S^n . Šodienas nodarbība būs par riņķa līnijām, bet tās atradīsies gan 2 gan 3 dimensijās.

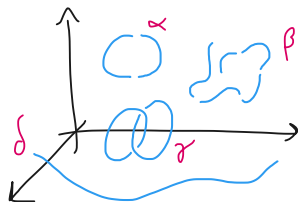


1. Definīcijas: funkcija

Funkcija no riņķa līnijas S^1 uz 3 dimensiju telpu pārveido riņķa līniju:

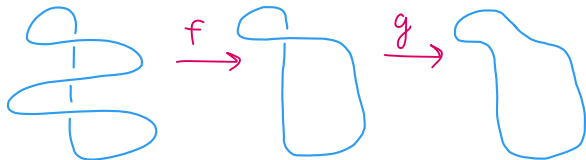


nepārtrauktas funkcijas



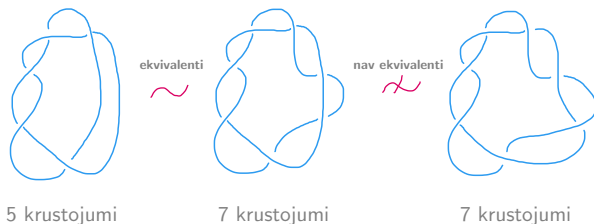
pārtrauktas funkcijas

Var arī būt nepārtraukta funkcija starp attēliem:

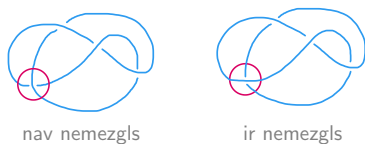


1. Definīcijas: mezgli un nezemgli

Mezgli ir nepārtrauktas funkcijas no S^1 attēls. **Mezгла diagramma** ir mezгла zīmējums - mezglam var būt vairāku diagrammu, kuras visas ir **ekvivalentas**:

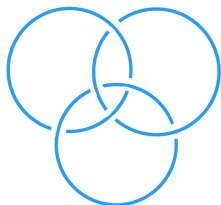


Katrai mezгла diagrammai ir **krustojumu** skaits. **Nemezgli** ir mezgli bez neviena krustojuma. Krustojuma **maiņa** ir kad maina šķersošanas kārtību.

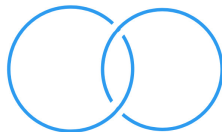


1. Definīcijas: saites

Saite ir vairāku mezglu apkopojums.

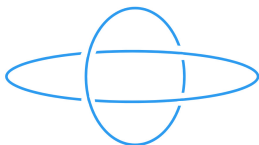


Boromiešu riņķi
saite ar 3 komponentēm

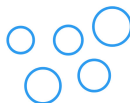


Hopfa saite
saite ar 2 komponentēm

Nesaite ir vairāku nemezglu apkopojums.



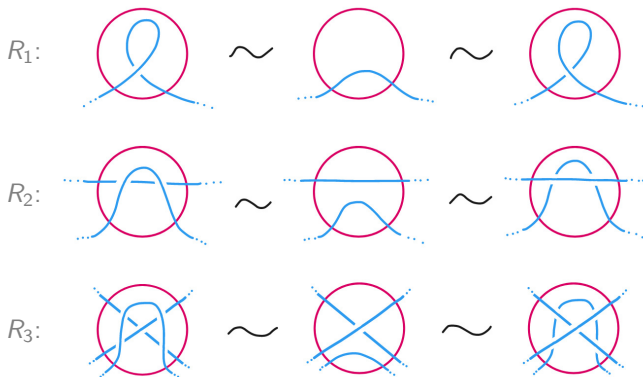
nesaite ar 2 komponentēm



nesaite ar 5 komponentēm

2. Funkcijas: gājieni un ekvivalences

Mezglu ekvivalence par precīzi definēt ar **gājieniem**. Ja divi mezgli ir ekvivalenti, tie ir ekvivalenti caur gājieniem, kur ārpus sarkanā apla diagramma nemainās.



Funkcija no mezgla diagrammas, kuras vērtība nemainās, kad mezglam veic kādu no gājieniem, ir mezgla **invariants**.

2. Funkcijas: mezglu un saišu invarianti

Taisnes skaitlis $T(M)$: mazākais taisņu skaits, lai uzzīmētu mezglu.



mezgla diagramma M



$T(M) \leq 10$



$T(M) \leq 9$

Krustojumu skaitlis $K(M)$: mazākais krustojumu skaits mezglam.



$K(M) \leq 6$



$K(M) \leq 6$



$K(M) \leq 5$

Atmezglošanas skaitlis $A(M)$: mazākais krustojumu maiņas skaitlis, lai tiktu līdz nemezglam vai nesaitei.



M ar 5 krustojumiem



$A(M) \leq 2$



$A(M) \leq 1$

2. Funkcijas: Kaufmana iekavas

Saites S **Kaufmana iekavas** $\langle S \rangle$ ir polinoms mainīgos x, y, z , un apmierina sekojošās īpašības:

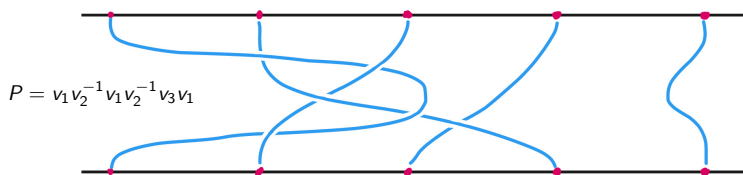
- ▶ $\langle \text{nemezģls} \rangle = 1$
- ▶ $\langle \text{nemezģls un } S \rangle = z \cdot \langle S \rangle$
- ▶ $\langle \text{krustojums} \rangle = x \cdot \langle \text{pāri} \rangle + y \cdot \langle \text{apakšā} \rangle$

Piemēram:

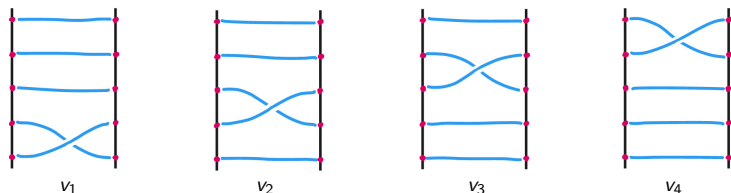
$$\begin{aligned} \langle \text{divas saites} \rangle &= x \cdot \langle \text{divas saites, pāri} \rangle + y \cdot \langle \text{divas saites, apakšā} \rangle \\ &= x^2 \langle \text{divas saites, pāri, pāri} \rangle + xy \langle \text{divas saites, pāri, apakšā} \rangle + y^2 \langle \text{divas saites, apakšā, pāri} \rangle + yx \langle \text{divas saites, apakšā, apakšā} \rangle \\ &= x^2 z \cdot \langle \text{divas saites, pāri} \rangle + xy \cdot 1 + y^2 z \cdot \langle \text{divas saites, apakšā} \rangle + yx \cdot 1 \\ &= x^2 z + xy + y^2 z + yx \\ &= x^2 z + 2xy + y^2 z \end{aligned}$$

3. Pīnes: mezglu algebra

Pīne ar n **pavedieniem** ir nepārtrauktas funkcijas attēls no n nogriežņiem, tā lai nogriežņu sākumi ir uz paralēlas ass nogriežņu beigām.



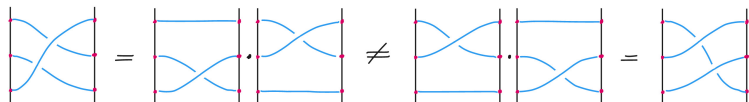
Visas pīnes sastāv no **veidulēm**, to inversiem, un to reizinājumiem.



Veidules v_1 inversā pīne v_1^{-1} ir ar pretējo krustojumu.

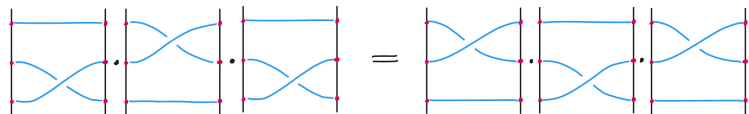
3. Pīnes: veiduļu reizināšana

Atšķirībā no skaitļu reizināšanas, pīņu reizināšana nav **komutatīva**:



Tas ir, $v_1 \cdot v_2 \neq v_2 \cdot v_1$. Visas pīņu veidules apmierina sekojošās vienādības:

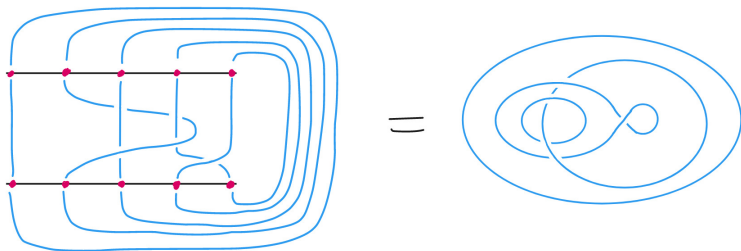
- ▶ ja $|i - j| \geq 2$, tad $v_i \cdot v_j = v_j \cdot v_i$
- ▶ ja $1 \leq i \leq n - 2$, tad $v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1}$:



Šī vienādība atbilst mezglu gājienam R_3 .

3. Pīnes: slēgtība

Pīnei ar n pavedieniem pievienojot n nogriežņus, tā lai nevienam nogriežnim nebūtu vaļējs gals, iegūst pīnes **slēgtību**.



Pīnes slēgtība vienmēr būs mezgls vai saite.